Conteneurs élémentaires

CPES2: Algorithmique et Applications

Pierre Senellart

23 septembre 2022

Plan

Conteneurs

- Structures de données stockant une séquence $S = (s_0, \ldots, s_{n-1})$ de n éléments (des entiers, des nombres à virgule flottante, des objets complexes, etc.)
- Différentes spécifications de telles structures, permettant différentes opérations, avec une efficacité différente :
  - Accès aléatoire : étant donné i, récupérer s_i ; toujours possible en $O(n)$
  - Accès au début (s_0), à la fin (s_{n-1})
  - Insertion au début (avant s_0), à une position aléatoire (entre s_i et s_{i+1}), à la fin (après s_{n-1})
  - Suppression du premier élément (s_0), d'un élément aléatoire (s_i), du dernier élément (s_n)
  - Recherche d'une occurrence d'un élément s (renvoyer un i tel que $s_i = s$) ; toujours possible en $O(n)$

Dans ce cours

- Deux grandes classes de conteneurs :

  Tableaux (de taille fixe ou dynamique) : stockage contigu en mémoire

  Listes (simplement ou doublement) chaînées : stockage non contigu, pointeurs reliant les élément les uns aux autres

- Des structures de données abstraites utilisant ces conteneurs : pile, file, file à deux bouts

Plan

Tableau de taille fixe

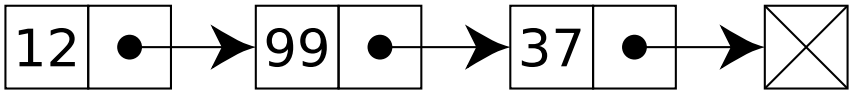
- Zone de mémoire contiguë, de taille fixe, allouée à la construction
- Accès aléatoire en $\Theta(1)$: si le tableau est à la position t en mémoire et contient des éléments de k octets chacun, il suffit d'accéder à l'élément à la position $t + ki$
- Insertion, suppression impossible
- Aussi compact que possible, pas de place perdue

Tableau de taille fixe en Python

- N'existe pas dans la bibliothèque standard (mais possibilité d'utiliser des tableaux dynamiques, voir plus loin)
- `numpy.array` dans le module tiers (mais très utilisé) `numpy`
- Stocke des éléments homogènes : types élémentaires (par exemple, entier entre -2^{31} et $2^{31}-1$; nombre à virgule flottante sur 64 bits ; etc.) ou types plus complexes formés à partir des types de base
- Nombreuses fonctionnalités particulièrement adaptées au stockage et au traitement efficace de valeurs numériques
- Cas particulier d'un `numpy.ndarray` : tableau multi-dimensionnel

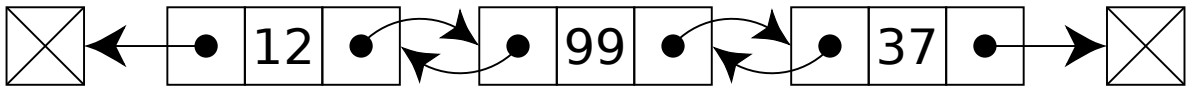
Plan

Liste simplement chaînée



- Chaque élément est stocké dans un chaînon, qui contient également un pointeur vers l'élément suivant
- On garde également un pointeur vers le premier chaînon
- Accès au premier élément en $\Theta(1)$
- Accès aléatoire ou accès au dernier élément en $O(n)$
- Insertion à une position aléatoire (après accès aléatoire) en $\Theta(1)$
- Suppression du premier élément en $\Theta(1)$
- Suppression en $\Theta(1)$ si l'élément précédent est connu, en $O(n)$ sinon

Liste doublement chaînée



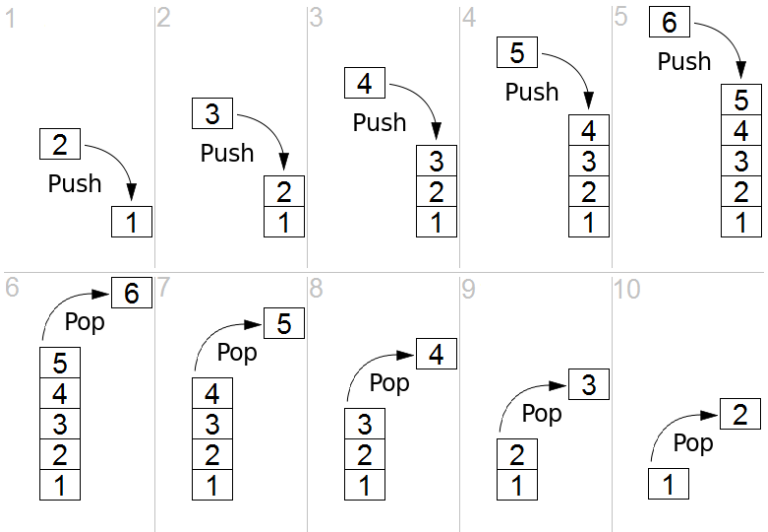
- Chaque élément est stocké dans un chaînon, qui contient également un pointeur vers les éléments précédent et suivant
- On garde également un pointeur vers les premier et dernier chaînons
- Accès au premier ou dernier élément en $\Theta(1)$
- Accès aléatoire en $O(n)$
- Insertion à une position aléatoire (après accès aléatoire) en $\Theta(1)$
- Suppression du premier ou dernier élément en $\Theta(1)$
- Suppression (après accès aléatoire) en $\Theta(1)$
- Plus puissant, moins compact que la liste simplement chaînée

Listes chaînées en Python

- Pas de liste simplement chaînée dans la bibliothèque standard
- `collections.deque` est une variante de liste doublement chaînée dans laquelle on ne stocke pas un élément par chaînon, mais un nombre fixe d'éléments (actuellement, 64 dans l'implémentation de référence)
- Sert surtout à implémenter des files à deux bouts (voir plus loin)

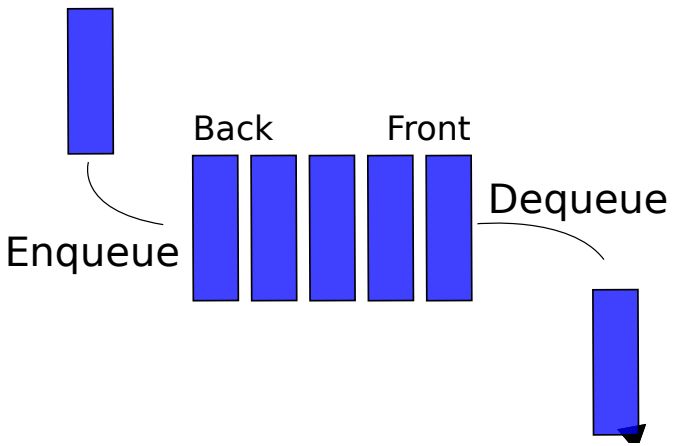
Plan

Pile (*Stack* ou *LIFO* pour *last-in-first-out*)



- Structure de donnée abstraite, qui peut être implémentée de différentes manières, p. ex., avec une liste simplement chaînée ou un tableau dynamique
- Seules opérations possibles :
  - Accès au premier élément en $\Theta(1)$
  - Insertion au début en $\Theta(1)$ (empiler ou push)
  - Suppression du premier élément en $\Theta(1)$ (dépiler ou pop)

File (*Queue* or *FIFO* pour *first-in-first-out*)



- Structure de données abstraite, qui peut être implémentée de différentes manières, p. ex., par une liste doublement chaînée ou un tableau dynamique à deux bouts
- Seules opérations possibles :
  - Accès au premier élément en $\Theta(1)$
  - Insertion à la fin en $\Theta(1)$ (enfiler ou enqueue)
  - Suppression du premier élément en $\Theta(1)$ (défiler ou dequeue)

File à deux bouts (deque)

- Structure de données abstraite, qui peut être implémentée de différentes manières, p. ex., par une liste doublement chaînée ou un tableau dynamique à deux bouts
- Combine les opérations des piles et des files
- Seules opérations possibles :
  - Accès au premier ou au dernier élément en $\Theta(1)$
  - Insertion au début ou à la fin en $\Theta(1)$
  - Suppression du premier ou du dernier élément en $\Theta(1)$
- Variante parfois utile : file à deux bouts avec taille maximale – quand la file à deux bouts est pleine et qu'on ajoute un élément, on enlève un élément de l'autre côté

Piles et files en Python

- Pas de pile ou de file simples dans la bibliothèque standard
- Mais collections.deque implémente une file à deux bouts avec une liste doublement chaînée (avec plusieurs éléments par maillon)
- Opérations : `append`, `appendleft`, `pop`, `popleft` – on peut donc par exemple utiliser `append` et `pop` pour une pile, et `appendleft` et `pop` pour une file
- On peut spécifier un paramètre `maxlen` à la création pour indiquer une taille maximale – par défaut, pas de taille maximale
- Pour les piles, aussi possible d'utiliser des tableaux dynamiques
- Il existe `queue.LifoQueue` et `queue.Queue` mais plutôt prévues pour de la programmation concurrente

Plan

Complexité amortie

- Jusqu'ici, la complexité algorithmique (en temps) est mesurée séparément pour chaque opération d'une structure de données
- Parfois, impossible de fournir une bonne borne sur le temps individuel de chaque opération, mais possible de borner le temps moyen d'une suite finie d'opérations
- Soit une suite de n opérations $o_1, \ldots, o_n$ sur une structure de données, avec coûts $c_1, \ldots, c_n$
- La complexité moyenne d'une opération o_i est

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i$$

- On appelle ça la complexité amortie
- N'a de sens que si on définit précisément le type de suite d'opérations considéré (par exemple, insertions)

Complexité amortie, complexité en moyenne

- Deux notions orthogonales :

  Complexité amortie En moyenne, combien de temps prend une opération au sein d'une suite finie d'opérations d'un type donné

  Complexité en moyenne En moyenne, combien de temps prend une opération, parmi toutes les entrées possibles (par opposition au pire des cas)

- On peut donc parler de complexité amortie dans le pire des cas (et c'est la notion habituelle) et de complexité amortie en moyenne

Calcul de la complexité amortie

- Manuellement, en calculant le coût de chaque opération au sein d'une séquence et en moyennant le tout
- Parfois difficile parce qu'il faut être précis dans ce calcul et considérer l'impact de chaque opération sur les opérations suivantes
- Astuce : associer un potentiel à la structure de données sur laquelle les opérations ont lieu. Quand l'opération est bon marché, on augmente le potentiel ; quand l'opération est chère, on compense en réduisant le potentiel.
- La méthode du potentiel permet de considérer chaque opération individuellement : l'impact de l'opération sur les opérations suivantes est remplacé par l'impact de l'opération sur le potentiel
- Mais parfois difficile de trouver la bonne fonction de potentiel

Méthode du potentiel

- On associe un potentiel $\Phi(X)$ (nombre réel) à une structure de données X
- Soit une suite de n opérations $o_1, \ldots, o_n$, de coûts réels $c_1, \ldots, c_n$, et les structures de données correspondantes $X_0, \ldots, X_n$ $(X_i = o_i(X_{i-1}))$
- Soit $\hat{c}_i := c_i + \Phi(X_i) - \Phi(X_{i-1})$
- Alors : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i + \frac{1}{n}(\Phi(X_n) - \Phi(X_0))$
- Si $\hat{c}_i = O(f(|X_n|))$, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = O(f(|X_n|))$
- Donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i = O(f(|X_n|))$ dès que, pour tout n, $\Phi(X_n) - \Phi(X_0) \geqslant 0$
- On prend souvent X_0 la structure de données vide et $\Phi(X_0) := 0$, ce qui donne la condition $\Phi(X_n) \geqslant 0$

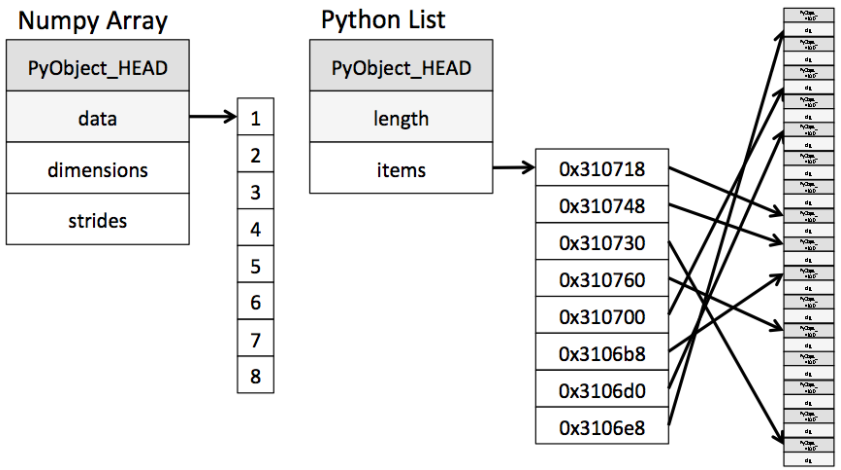
Plan

Application : tableau dynamique

- Pointeur vers un tableau de taille fixe cap + entier $n \leqslant cap$ stockant le nombre d'éléments réellement utilisé dans ce tableau
- Accès aléatoire en $\Theta(1)$ comme pour un tableau de taille fixe
- Suppression du dernier élément en $\Theta(1)$ en décrémentant n
- Insertion à la fin en complexité amortie $\Theta(1)$ (voir plus loin)
- Suppression ou insertion ailleurs qu'à la fin en $\Theta(n)$: on recopie le tableau

Tableau dynamique en Python

- Les listes Python sont des tableaux dynamiques
- De même pour array.array, structure de données de la bibliothèque standard
- Les listes Python sont des structures de données hétérogènes (n'importe quelle valeur Python peut être ajoutée à une liste existante)
- Les `array.array` (et les `numpy.array` de taille fixe) sont des structures de données homogènes : bien plus compact en mémoire, traitement des données bien plus efficaces



Insertion à la fin d'un tableau dynamique

Entrée: tableau T de capacité cap et de taille n, élément x
Sortie: tableau T de taille $n+1$ avec $T[n] = x$

```
if n = cap then
    créer un nouveau tableau T' de capacité max(2 × cap, 1)
    for i ← 0 to n − 1 do
        T'[i] ← T[i]
    end for
    détruire le tableau référencé par T
    faire pointer T vers T'
    cap ← max(2 × cap, 1)
end if
T[n] ← x
n ← n + 1
```

Complexité amortie de n insertions – direct (1/2)

- On part du tableau vide T_0, on insère n éléments (en obtenant successivement les tableaux $T_1, \ldots, T_n$ de taille $1 \ldots n$ et de capacité $cap(T_1), \ldots, cap(T_n)$)
- On calcule c_i pour $1 \leqslant i \leqslant N$
- Pour les i tels que $i - 1 \neq cap(T_{i-1})$, $c_i = \Theta(1)$
- Pour les i tels que $i - 1 = cap(T_{i-1})$, $c_i = \Theta(i)$
- Quels sont les i tels que $i = cap(T_i)$? 0, 1, 2, 4, 8, 16, ... ce sont les puissances de 2 (plus 0)
- Il y a $\mathrm{E}[\log_2(n-1)] + 1 = \Theta(\log n)$ puissances de 2 entre 0 et $n - 1$ (plus 0)

Complexité amortie de n insertions – direct (2/2)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{E}[\log_2(n-1)]} \Theta(2^k) + O(n)\right)$$

Rappel : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \alpha^k = \frac{\alpha^{m+1}-1}{\alpha-1}$ (pour $\alpha \neq 1$)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \leqslant \frac{1}{n} O\left(2^{\mathrm{E}[\log_2(n-1)]+1} + O(n)\right) = \frac{1}{n}\left(O(n) + O(n)\right) = O(1)$$

Complexité amortie de n insertions – potentiel (1/2)

- On part du tableau vide T_0, on insère n éléments (en obtenant successivement les tableaux $T_1, \ldots, T_n$ de taille $1 \ldots n$ et de capacité $cap(T_1), \ldots, cap(T_n)$)
- On définit le potentiel d'un tableau T_i de taille i et de capacité $cap(T_i)$ par $\Phi(T_i) := (2i - cap(T_i)) \times \alpha$ pour une certaine constante α définie plus tard
- On a bien $\Phi(T_0) = 0$ et $\Phi(T_i) \geqslant 0$ pour tout i
- On calcule la complexité $\hat{c}_i$ amortie par le potentiel Φ : $\hat{c}_i := c_i + \Phi(X_i) - \Phi(X_{i-1})$

Complexité amortie de n insertions – potentiel (2/2)

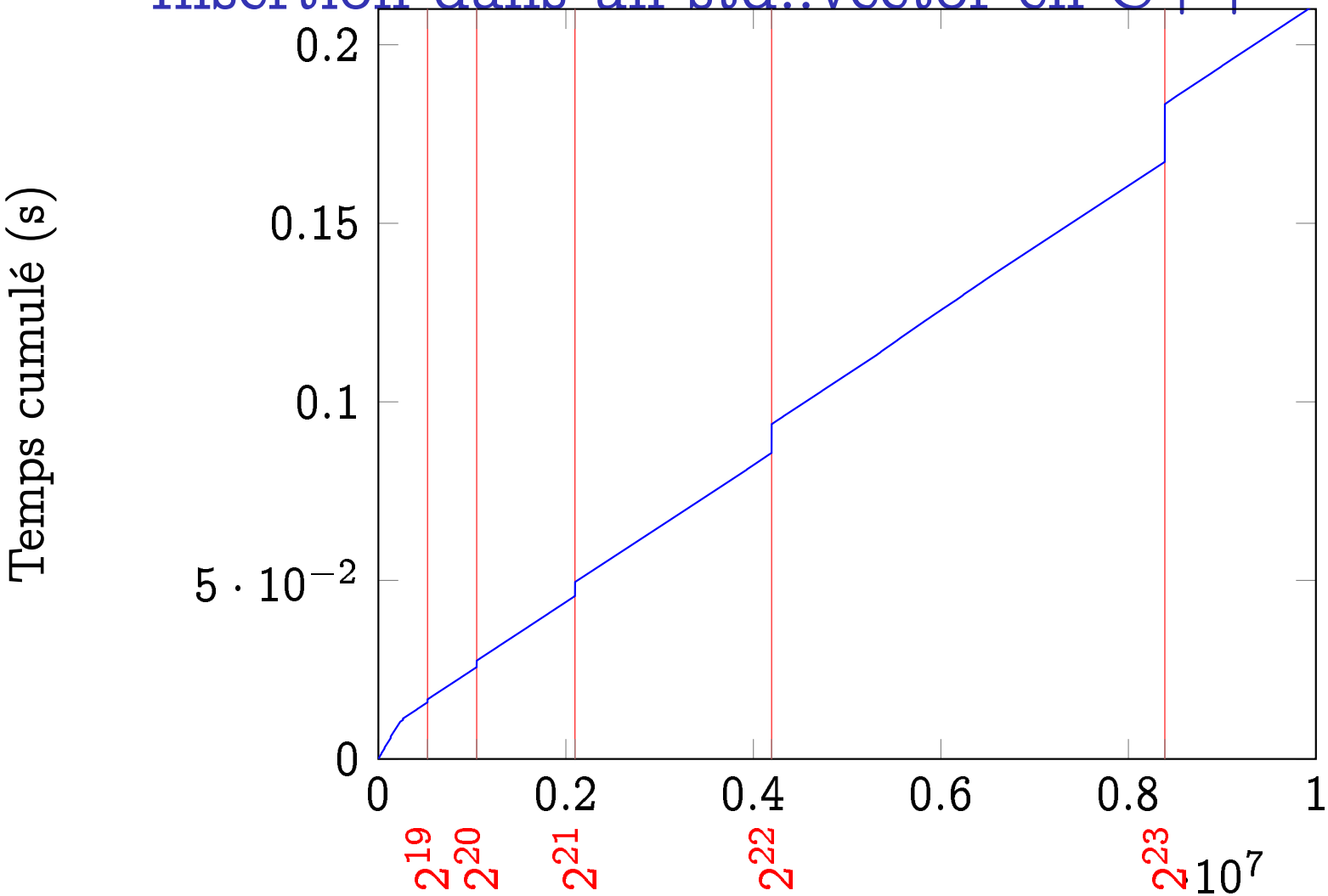
- Pour les i tels que $i-1 \neq cap(T_{i-1})$, $c_i = O(1)$ et $\Phi(X_i) - \Phi(X_{i-1}) = 2\alpha$; on prend α tel que $c_i \leqslant \alpha$ pour i suffisamment grand
- Pour les i tels que $i-1 = cap(T_{i-1})$, $c_i = O(i)$ et $\Phi(X_i) - \Phi(X_{i-1}) = (3-i)\alpha$; on prend α tel que $c_i \leqslant \alpha i$ pour i suffisamment grand
- On a alors

$$\hat{c}_i \leqslant \max(\alpha + 2\alpha, \alpha i + (3-i)\alpha) = 3\alpha = O(1)$$

Suppression dans les tableaux dynamiques

- Tel que présenté : suppression en $O(1)$ à la fin du tableau (on décrémente n)
- Mais ça veut dire qu'on ne libère jamais d'espace mémoire, même si le tableau diminue beaucoup : complexité en espace excessive
- Aussi : analyse par la méthode du potentiel d'une combinaison d'insertions et suppressions invalide si $2n - cap < 0$
- En pratique : on diminue la capacité du tableau quand la taille est suffisamment diminuée
- On ne prend pas la même borne pour éviter de constamment créer/détruire des tableaux si on ajoute/enlève successivement un élément proche de la capacité
- Analyse complète : chap. 17 de Cormen et al. [2010, 2009]

Insertion dans un std::vector en C++



Insertion dans une liste en Python

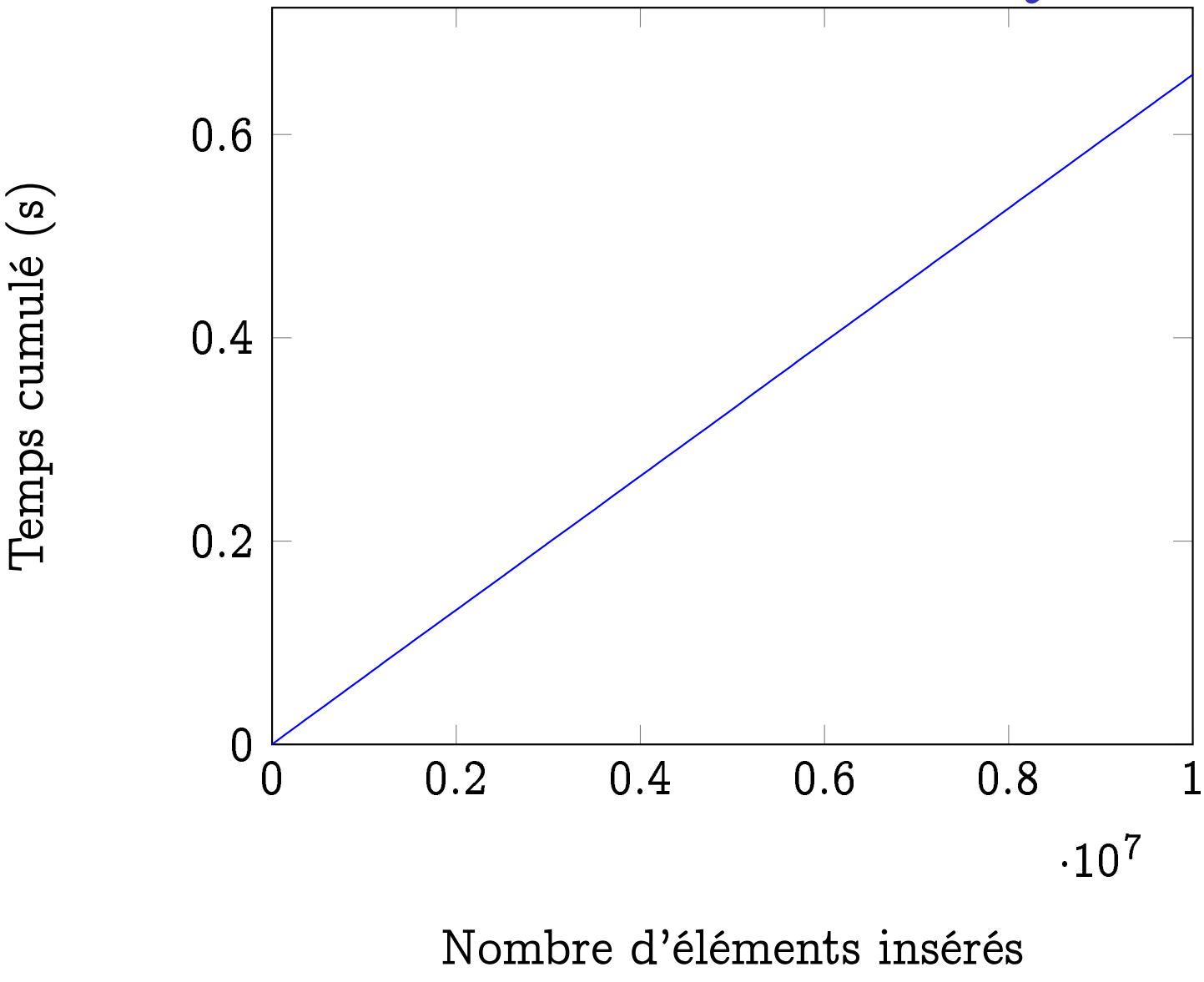
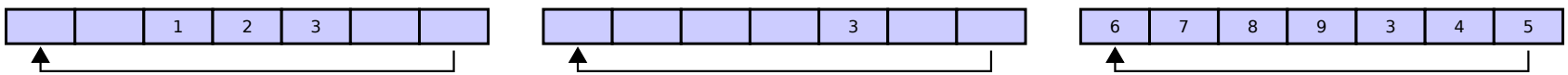


Tableau dynamique à deux bouts

- But : avoir une complexité amortie en $O(1)$ pour l'ajout et la suppression au début comme à la fin d'un tableau ; on conserve l'accès aléatoire en $O(1)$
- Utile pour implémenter une file, une file à deux bouts
- Deux possibilités pour l'implémenter :
  - Un tableau dynamique que l'on remplit à partir du milieu – quand on atteint le début ou la fin du tableau alloué, on crée un nouveau tableau plus grand
  - Un tableau dynamique implémentant un buffer circulaire : même concept mais si on arrive à un bout du tableau et qu'il reste de la place à l'autre bout, on y met les éléments jusqu'à ce que le tableau soit entièrement rempli



Plan

Nombre d'éléments

- Les conteneurs peuvent (ou non) stocker en plus des éléments le nombre d'éléments pour pouvoir l'obtenir en $\Theta(1)$
- Tableau dynamique : obligatoire
- Tableau de taille fixe : optionnel, mais dangereux de ne pas le stocker (accès à de la mémoire hors bornes)
- Liste chaînée : optionnel ; si non stocké, peut être calculé en $\Theta(n)$
- Très peu coûteux à maintenir, et utile à avoir, donc le plus souvent stocké

Variante : conteneur trié

- Les éléments de la séquence ne sont pas en positions arbitraires mais on suppose $s_0 \leqslant \ldots \leqslant s_{n-1}$ pour un certain opérateur de comparaison $\leqslant$
- On n'insère pas à une position arbitraire, mais on insère en suivant l'ordre
- Tableaux (fixes et dynamiques) : recherche en $O(\log n)$ par recherche dichotomique
- Tableau dynamique : insertion en $O(n)$
- Liste chaînée : recherche et insertion en $O(n)$ – mais des listes chaînées triées peuvent être utiles dans certains cas, par exemple pour implémenter des algorithmes de tri

Plan

Références

- Conteneurs de bases : chap. 10 de [Cormen et al., 2009, 2010]
- Complexité amortie et tableaux dynamiques : chap. 17 de [Cormen et al., 2009, 2010]
- Utilisation des `numpy.array` et bien d'autre chose pour la science des données en Python : VanderPlas [2016] (en anglais, librement accessible en ligne)

Bibliographie

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3rd edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL http://mitpress.mit.edu/books/introduction-algorithms.

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Algorithmique*. Dunod, 3rd edition, 2010. ISBN 978-2-100-54526-1. URL https://www.dunod.com/sciences-techniques/algorithmique-cours-avec-957-exercices-et-158-problemes.

Jake VanderPlas. *Python Data Science Handbook*. O'Reilly, 2016. https://jakevdp.github.io/PythonDataScienceHandbook/.

Ressources utilisées et licence

- L'image d'une file est due à Vegpuff (Wikimedia), CC-BY-SA-3.0.
- L'image du stockage mémoire des tableaux Numpy vs les listes Python est due à Jake VanderPlas et extraite de VanderPlas [2016], CC-BY-NC-ND-3.0.
- L'image des buffers circulaires est due à Cburnett (Wikimedia), CC-BY-SA-3.0.