

Introduction aux problèmes NP-complets (chap. 34)

CPES2: Algorithmique et Applications

Pierre Senellart

12 octobre 2020

1 Motivation

- Tri: complexité $O(n \log n)$
- Multiplication matricielle: $O(n^{\log_2(7)})$ par l'algorithme de Strassen
- Retour sur le problème du sac à dos, complexité $O(W \times n)$
- Définition de la notion d'algorithme *polynomial*, notion de taille de l'entrée
- Tri: polynomial, Sac à dos: pseudo-polynomial (pseudo-polynomialité courante pour les algos de programmation dynamique)
- Peut-on faire mieux pour le sac à dos?

2 P et NP

- Problèmes de *décision*
- Variante décision du problème du tri (un tableau est-il trié), de la multiplication matricielle (vérification), du sac à dos (est-ce que pour V fixé on peut trouver S t.q. $\sum_{i \in S} v_i \geq V$)
- Remarque que la complexité du problème de décision peut être inférieure
- Note sur le formalisme (algorithme vs machine de Turing)
- Définition de la classe P ou PTIME
- Ajout dans un algorithme d'une opération *Deviner*, notion de non-déterminisme
- Définition de la classe NP
- $P \subseteq NP$
- Preuve que le problème du sac à dos est dans NP
- Intuitivement: on peut vérifier une solution en temps polynomial
- NP ne veut pas dire non-polynomial!
- Mais tout problème dans NP peut se résoudre en temps exponentiel

3 Digression: formules logiques et satisfiabilité

- Définition d'une formule du calcul des propositions, syntaxe (avec parenthèses, mais on enlève les parenthèses quand il n'y a pas d'ambiguïté), valuation
- Définition d'une CNF, d'une DNF
- Évaluation en temps linéaire d'une CNF ou d'une DNF
- Problème de satisfiabilité
- Satisfiabilité d'une DNF en temps linéaire
- Satisfiabilité de CNF est dans NP

4 NP-complétude

- Définition de NP-difficile, NP-complet
- Le problème P vs NP, lien avec NP-complétude
- **Admis:** 3SAT (satisfiabilité de 3CNF) est NP-difficile
- Notion de réduction (de Karp, en temps polynomial). Proposition: tout problème à quoi un problème NP-difficile peut être réduit est NP-difficile.
- Preuve que le problème du sac à dos est NP-difficile et donc NP-complet:
 - Introduction du problème de la somme des sous-ensembles
 - Réduction de somme des sous-ensembles vers sac à dos
 - Réduction de 3SAT vers somme des sous-ensembles (réduction, preuve d'équivalence dans les deux sens)