Mesurer l'efficacité d'un algorithme

CPES2: Algorithmique et Applications

Pierre Senellart

17 septembre 2020

Plan

Algorithmique

- Vient du nom de محمد بن موسى الخوارزمى (Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi), un scientifique perse du IX^{e} siècle
- ... qui est aussi à l'origine du mot algèbre (الْجَبْر, *remise en place* (des os fracturés) en arabe), du titre de l'un de ses livres sur la résolution d'équations
- Un algorithme est une spécification formelle de la manière dont résoudre un problème donné : à partir d'une entrée, comment produire la sortie correspondant à la solution d'une problème, en combinant des opérations élémentaires
- L'algorithmique est l'étude des algorithmes : conception de l'algorithme, analyse de sa performance, démonstration de sa correction, etc.
- La programmation est la manière de transformer (on dit implémenter) un algorithme en un code dans un langage informatique, afin d'exécuter l'algorithme sur des données concrètes

Algorithmique et programmation

- Tout algorithme est implémentable : il doit être décrit en des termes suffisamment précis pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur comment le transformer en programme
- ... mais cela ne veut pas dire que le programme implémentant l'algorithme est facile à écrire, car le programmeur doit prendre en compte les limitations de la machine, les particularités du langage, des objets de bas de niveau et pas des concepts de haut niveau, etc.
- Algorithme : abstraction de ce qui est implémentable
- Le langage de programmation n'a pas d'influence sur ce qui est implémentable ; tous les langages de programmation ont le même pouvoir d'expression (on dit qu'ils sont Turing-complet, on expliquera)
- ... mais un langage a un impact sur la facilité (cf. `https://pierre.senellart.com/other/languages/languages.xml`) ou sur l'efficacité de l'implémentation

Structure de données

- Élément de base utilisé dans des algorithmes plus complexes, réutilisé dans des algorithmes divers pour résoudre différents problèmes
- Spécification formelle d'un objet mathématique abstrait (liste, ensemble, graphe, matrice, etc.), des opérations possibles sur cet objet (insertion, énumération, inversion, etc.) et des algorithmes les réalisant
- Élément implémentable, souvent sous la forme d'une classe en programmation orientée objet
- Souvent possible de concevoir différentes structures de données pour le même objet mathématique, plus ou moins efficaces pour une tâche donnée

Plan

Qui fait quoi ?

- L'algorithmicien conçoit, décrit et analyse un algorithme
- Le programmeur implémente cet algorithme dans un langage de programmation donné, pour un environnement donné
- Dans les langages interprétés (comme Python) :
  - le compilateur transforme le programme en bytecode spécifique au langage
  - l'interpréteur exécute le bytecode instruction par instruction
- Dans les langages compilés (comme C) :
  - le compilateur transforme le programme en code assembleur spécifique à la machine
  - l'assembleur transforme le code assembleur en code machine directement exécutable par le processeur

Exemple d'algorithme

Entrée : Tableau T avec n éléments distincts, un élément x

Sortie : la position de x dans T

1: **for** $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
2: **if** $T[i] = x$ **then**
3: **return** i
4: **end if**
5: **end for**
6: **return** *pas trouvé*

Programme Python

```
def find(x):
    for i in range(0, n):
        if T[i] == x:
            return i
    return -1
```

Bytecode Python

```
          0 SETUP_LOOP              43 (to 46)
          3 LOAD_GLOBAL              0 (range)
          6 LOAD_CONST               1 (0)
          9 LOAD_GLOBAL              1 (n)
         12 CALL_FUNCTION            2
         15 GET_ITER
    >>   16 FOR_ITER                26 (to 45)
         19 STORE_FAST               1 (i)
         22 LOAD_GLOBAL              2 (T)
         25 LOAD_FAST                1 (i)
         28 BINARY_SUBSCR
         29 LOAD_FAST                0 (x)
         32 COMPARE_OP               2 (==)
         35 POP_JUMP_IF_FALSE       16
         38 LOAD_FAST                1 (i)
         41 RETURN_VALUE
         42 JUMP_ABSOLUTE           16
    >>   45 POP_BLOCK
    >>   46 LOAD_CONST               2 (-1)
         49 RETURN_VALUE
```

Programme C

```
long find(int x) {
  for(long i=0; i<=1000; ++i)
    if(T[i]==x)
      return i;
  return -1;
}
```

Code assembleur x86-64 (compilé depuis C)

```
        push    rbp
        mov     rbp, rsp
        mov     DWORD PTR [rbp-20], edi
        mov     QWORD PTR [rbp-8], 0
.L5:    cmp     QWORD PTR [rbp-8], 1000
        jg      .L2
        mov     rax, QWORD PTR [rbp-8]
        mov     eax, DWORD PTR [rax*4+0x404060]
        cmp     DWORD PTR [rbp-20], eax
        jne     .L3
        mov     rax, QWORD PTR [rbp-8]
        jmp     .L4
.L3:    add     QWORD PTR [rbp-8], 1
        jmp     .L5
.L2:    mov     rax, -1
.L4:    pop     rbp
        ret
```

Code machine x86-64

```
        push    rbp                                 #55
        mov     rbp, rsp                            #48 89 e5
        mov     DWORD PTR [rbp-20], edi             #89 7d ec
        mov     QWORD PTR [rbp-8], 0                #48 c7 45 f8 00 00 00 00
.L5:    cmp     QWORD PTR [rbp-8], 1000             #48 81 7d f8 e8 03 00 00
        jg      .L2                                 #7f 1d
        mov     rax, QWORD PTR [rbp-8]              #48 8b 45 f8
        mov     eax, DWORD PTR [rax*4+0x404060]     #8b 04 85 60 40 40 00
        cmp     DWORD PTR [rbp-20], eax             #39 45 ec
        jne     .L3                                 #75 06
        mov     rax, QWORD PTR [rbp-8]              #48 8b 45 f8
        jmp     .L4                                 #eb 0e
.L3:    add     QWORD PTR [rbp-8], 1                #48 83 45 f8 01
        jmp     .L5                                 #eb d9
.L2:    mov     rax, -1                             #48 c7 c0 ff ff ff ff
.L4:    pop     rbp                                 #5d
        ret                                         #c3
```

Plan

Comment mesurer l'efficacité d'un algorithme ?

- Tentative de caractériser, à partir de la description d'un algorithme, l'efficacité d'un programme qui l'implémente ; ou, à partir de la description d'un problème, l'efficacité d'un programme qui implémente un algorithme résolvant ce problème
- Différents notions d'efficacité, différentes notions de complexité :

  Complexité en temps : temps d'exécution d'un programme

  Complexité en espace : espace mémoire occupé par un programme

  Complexité de communication : volume des données échangées par un système distribué

  Complexité descriptive : taille du plus petit programme

  Complexité de circuit : taille du plus petit circuit électronique implémentant le programme
- Dans ce cours : seulement les deux premiers (et principalement le premier !) – complexité algorithmique

Comment calculer la complexité en temps

- On suppose que chaque opération élémentaire apparaissant dans la description d'un algorithme :
  - opérations arithmétiques
  - affectations de variable
  - comparaisons
  - tests
  - etc.

  prend un temps élémentaire, borné par une constante C
- On calcule la somme du nombre d'opérations élémentaires effectuées, en fonction de la taille de l'entrée n, p. ex., $42 \times n$
- On en déduit une borne, ici $42 \times n \times C$, sur le temps total de l'algorithme

Opérations élémentaires

- Pas défini formellement pour l'instant
- Mais on peut penser, par exemple :
  - au nombre d'instructions de bytecode que l'interpréteur exécute (en bornant le temps pris par une instruction par le temps maximal pris par toutes les instructions du bytecode)
  - au nombre d'instructions assembleur qui seront exécutées par le processeur en un cycle processeur (3 milliards par seconde pour un processeur 3 GHz) une fois assemblées
- En pratique, plus compliqué que ça : pipelining, instructions nécessitant plusieurs cycles, exécution préditive, etc. Pas grave ! On peut toujours borner par une constante suffisamment grande les opérations élémentaires.
- Pour les raisonnements théoriques : on peut rendre la notion d'opération élémentaire plus formelle (avec la notion de machine de Turing ou de machine de Von Neumann), mais on passe pour l'instant

Notations $O()$, $\Omega()$, $\Theta()$

- Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions
- On écrit $f(n) \in O(g(n))$ (ou $f(n) = O(g(n))$) si

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall n > N \quad f(n) \leqslant \alpha g(n)$$

- On écrit $f(n) \in \Omega(g(n))$ (ou $f(n) = \Omega(g(n))$) si

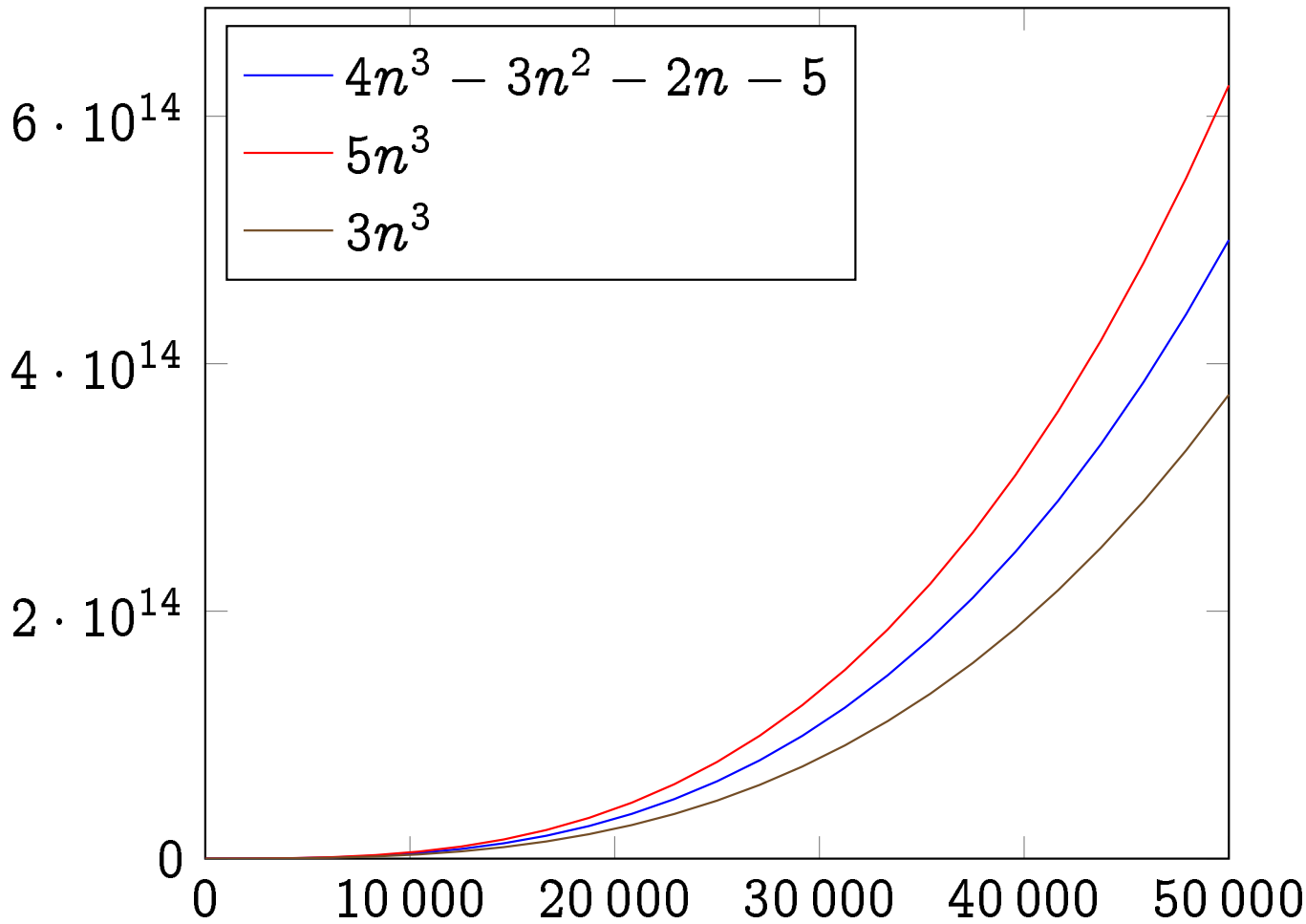
$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall n > N \quad f(n) \geqslant \alpha g(n)$$

- On écrit $f(n) \in \Theta(g(n))$ (or $f(n) = \Theta(g(n))$) si

$$f(n) = O(g(n)) \quad \text{et} \quad f(n) = \Omega(g(n))$$

Exemples de $O()$, $\Omega()$, $\Theta()$ – 1/2

Si P est un polynôme de degré k, $P(n) \in \Theta(n^k)$



Exemples de $O()$, $\Omega()$, $\Theta()$ – 2/2

- $\log n \in O(n)$ mais $\log n \notin \Omega(n)$
- $n \log n \in O(n^2)$, $n \log n \in \Omega(n)$, mais $n \log n \notin \Omega(n^2)$
- $42n^2 \log n + 23n^2 \in \Theta(n^2 \log n)$
- pour tout polynôme P, $P(n) \in O(2^n)$ mais $P(n) \notin \Omega(2^n)$
- Si $f(n) \in O(\varphi(n))$ et $g(n) \in O(\psi(n))$, alors
  $f(n) + g(n) \in O(\varphi(n) + \psi(n))$ et
  $f(n) \times g(n) \in O(\varphi(n) \times \psi(n))$
- Si $f(n) \in \Omega(\varphi(n))$ et $g(n) \in \Omega(\psi(n))$, alors
  $f(n) + g(n) \in \Omega(\varphi(n) + \psi(n))$ et
  $f(n) \times g(n) \in \Omega(\varphi(n) \times \psi(n))$

Complexité (en temps) asymptotique

- On utilise les notations $O()$, $\Omega()$, $\Theta()$ et les bornes qui ont été établies pour indiquer la complexité d'un algorithme en négligeant C et les autres constantes
- Par exemple, si le temps τ de chaque opération élémentaire est borné par :

$$C_1 \leqslant \tau \leqslant C_2$$

- ... et si sur toutes les entrées, l'algorithme A fait $42 \times n$ opérations élémentaires, alors :

$$42 \times C_1 \times n \leqslant \mathrm{T}(\mathcal{A}, n) \leqslant 42 \times C_2 \times n$$

et donc $T(\mathcal{A}, n) = \Theta(n)$

Complexité dans le pire cas, dans le cas moyen

- Habituellement, on cherche une borne supérieure sur le temps d'un algorithme, et on regarde la complexité dans le pire des cas : une borne supérieure qui est vraie sur n'importe quelle entrée
- Parfois trop restrictif, donc on regarde le cas moyen : en moyenne, pour toutes les entrées d'une taille donnée, quelle est une borne sur la complexité ?
- Ce cas moyen fait l'hypothèse que toutes les entrées ont la même probabilité, ce qui est débatable

Exemple simple : recherche dans un tableau

Entrée : Tableau T avec n éléments distincts, un élément x de T
Sortie : la position de x dans T

```
1: for i ← 0 to n − 1 do
2:     if T[i] = x then
3:         return i
4:     end if
5: end for
```

Combien d'opérations élémentaires ?

Pire cas

(x en dernière position)

- n affectations de i
- n comparaisons de i avec n
- n accès à $T[i]$
- n comparaisons de $T[i]$ avec x
- 1 retour

$4n + 1$, c.-à-d., $O(n)$

Cas moyen

(x en moyenne en position $n/2$)

- $n/2$ affectations de i
- $n/2$ comparaisons de i avec n
- $n/2$ accès à $T[i]$
- $n/2$ comparaisons de $T[i]$ avec x
- 1 retour

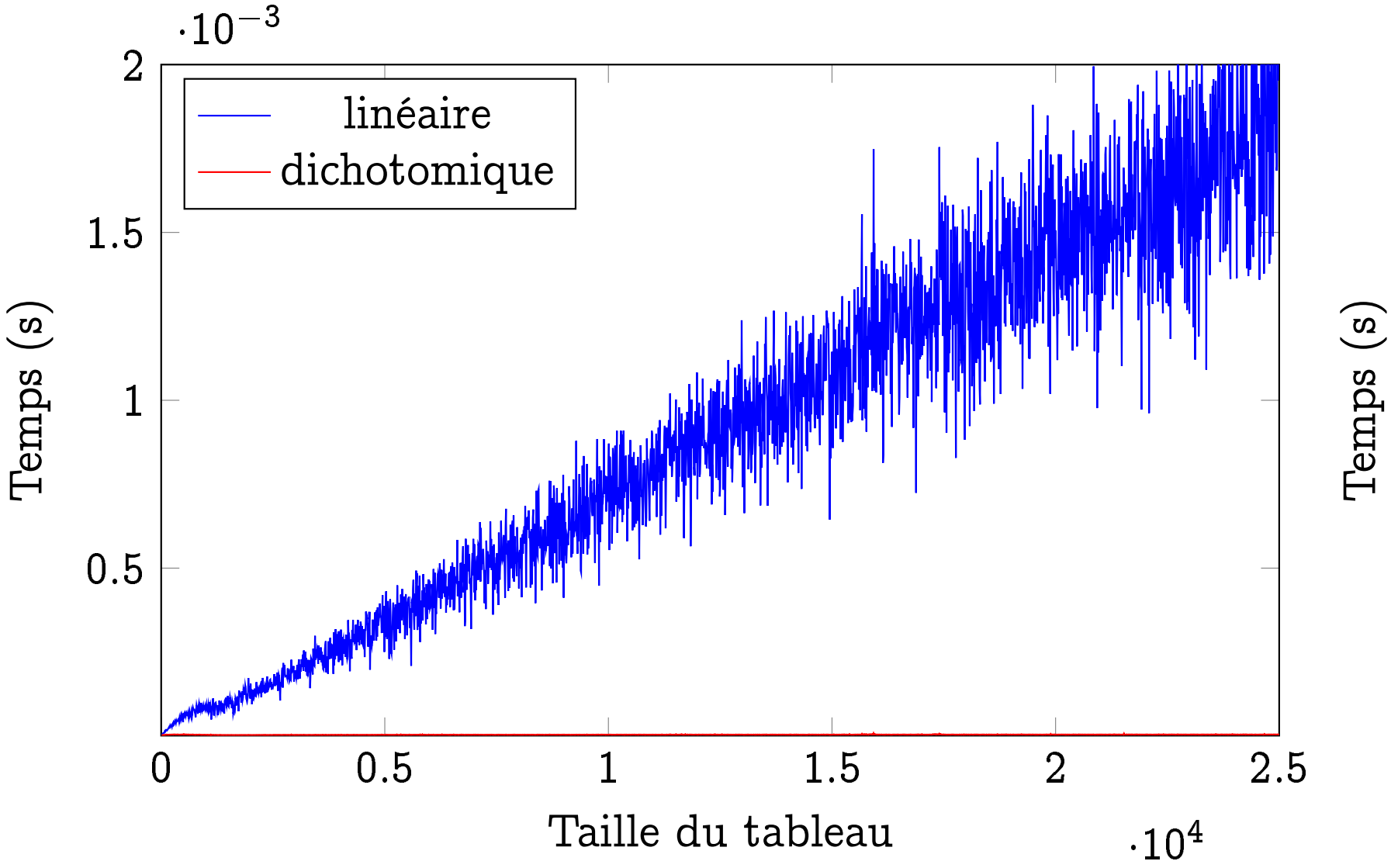
$2n + 1$, c.-à-d., $O(n)$

Complexité asymptotique et efficacité réelle

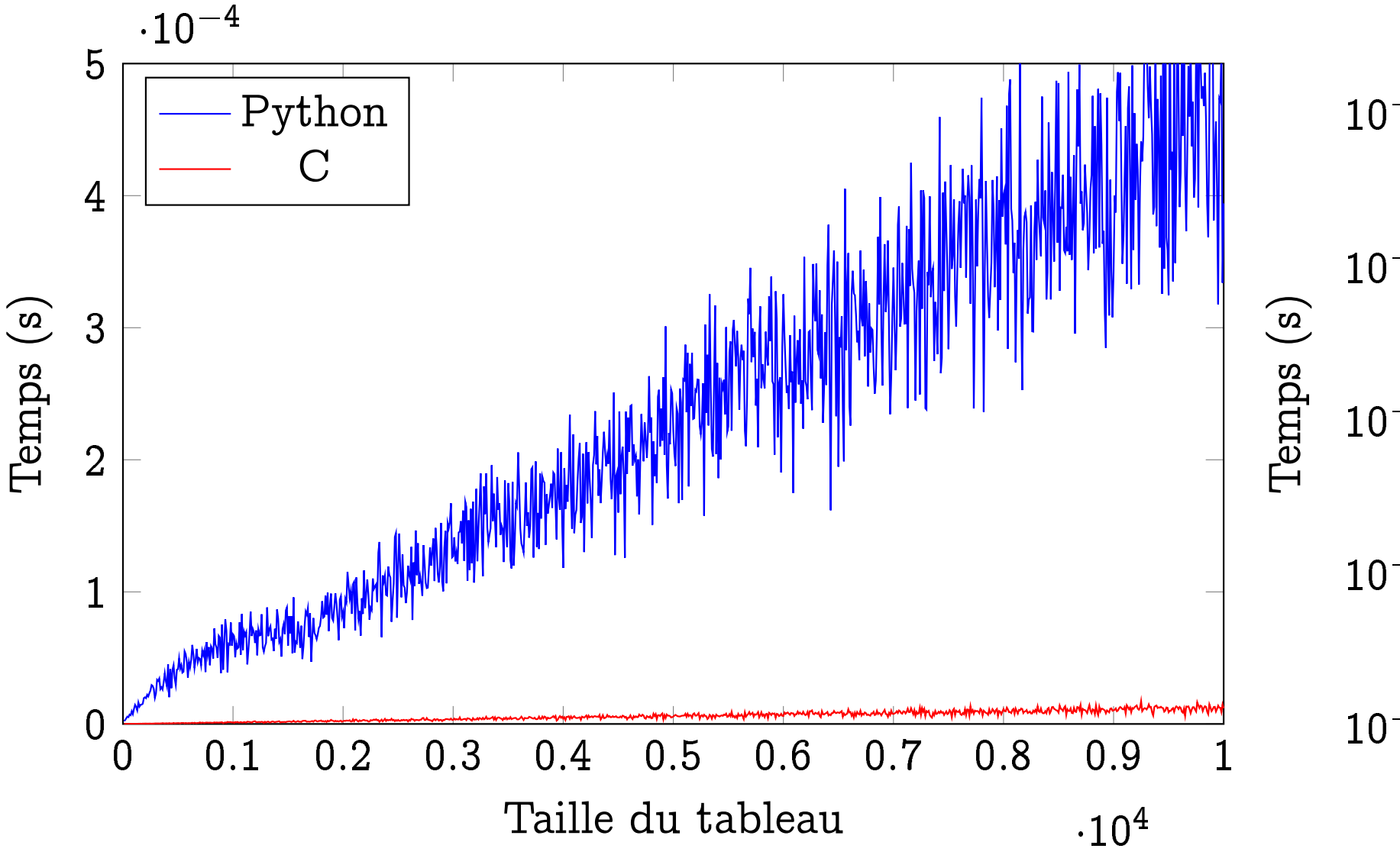
En pratique :

- La complexité asymptotique importe. Un algorithme en $\Theta(n)$ est plus lent qu'un algorithme en $O(\log n)$ *si* n *est suffisamment grand*
- Parfois, un algorithme en $\Omega(n^2)$ (c.-à-d., $\geqslant \alpha n^2$) peut être plus efficace qu'un algorithme en $O(n)$ (i.e., $\leqslant \beta n$) pour une taille d'entrée n courante, parce que $\alpha \ll \beta$
- Parfois, la complexité dans le pire des cas est haute, mais la complexité dans le cas moyen est faible, est la seule chose qui compte en pratique
- Le langage de programmation utilisé a un vrai impact sur les performances (mais, généralement, par un facteur constant, potentiellement grand)
- La complexité en temps ne dit rien sur le potentiel de parallélisation ou de distribution d'un algorithme – d'autres notions de complexité sont nécessaires

Recherche linéaire vs recherche dichotomique



Recherche linéaire : Python vs C



En pratique : résoudre un problème efficacement

- Concevoir (dans sa tête ou sur papier) un algorithme le plus efficace possible, en utilisant les structures de données les plus appropriées
- Calculer sa complexité algorithmique ($O()$ ou même $\Theta()$), dans le pire cas (et éventuellement dans le cas moyen)
- Implémenter l'algorithme dans un langage de programmation le plus fidèlement possible, en tenant compte des particularités de l'environnement
- Tester la correction et l'efficacité de l'algorithme sur des petits exemples et des exemples réels, vérifier expérimentalement la complexité algorithmique
- Faire du profilage de code pour déterminer les parties du programmes dans lesquelles le plus de temps est passé ; les optimiser (éventuellement en revenant à la conception de l'algorithme pour ces parties)

Complexité en espace

- Similaire à la complexité en temps, sauf que l'on mesure les usages élémentaires de la mémoire au lieu du temps des opérations élémentaires
- On fait souvent des hypothèses simplificatrices, comme le fait que n'importe quel entier tient en espace constant
- On ne compte pas l'espace dont on a besoin pour représenter l'entrée
- On utilise aussi $O()$, $\Omega()$, $\Theta()$ pour résumer la complexité asymptotique
- Par exemple, pour la recherche linéaire dans un tableau, la complexité en espace est $O(1)$: on a juste besoin de stocker la variable i en mémoire (en plus des entrées T et x), ce qui nécessite un espace élémentaire, indépendant de la taille de l'entrée

Plan

Références

- Généralités d'algorithmique : Chap. 1 de [Cormen et al., 2009, 2010]
- Bases d'analyse de complexité d'un algorithme : Chap. 2 et 3 de [Cormen et al., 2009, 2010]

Bibliographie

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3rd edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL `http://mitpress.mit.edu/books/introduction-algorithms`.

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Algorithmique*. Dunod, 3rd edition, 2010. ISBN 978-2-100-54526-1. URL `https://www.dunod.com/sciences-techniques/algorithmique-cours-avec-957-exercices-et-158-problemes`.