

Examen de rattrapage

Théorie des Langages (INF105)

Pierre SENELLART

pierre.senellart@telecom-paristech.fr

L'examen de rattrapage du module INF105 dure une heure et demie. Tous les documents sont autorisés, mais calculatrices, ordinateurs et moyens de communication sont interdits. L'énoncé comporte un unique exercice.

Compter les groupes de a

Dans tout cet exercice, on fixe l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Étant donné un mot $u \in \Sigma^*$, un *groupe de a* est défini comme un facteur maximal non-vide de u contenant uniquement des a . On note $g(u)$ le nombre de groupes de a d'un mot u . Pour un mot u avec $g(u) = k$, on note $c(u)$ le k -uplet formé de la longueur des groupes successifs de a dans u (c'est donc une suite finie de k entiers non nuls). Par exemple :

- $g(\varepsilon) = g(bb) = 0$ et $c(\varepsilon) = c(bb) = ()$;
- $g(aaabb) = 1$ et $c(aaabb) = (3)$;
- $g(baaaabaabaaaa) = 3$ et $c(baaaabaabaaaa) = (4, 2, 5)$.

On s'intéresse, pour $k \in \mathbb{N}$, au langage $L_k = \{u \in \Sigma^* \mid g(u) = k, c(u) = (\underbrace{n, \dots, n}_{k \text{ fois}}, n \in \mathbb{N}^*)\}$ des mots comportant exactement k groupes de a , tous de longueur identique.

1. (1 point) On s'intéresse tout d'abord au langage L_0 .
 - a) (0,5 point) Décrire en français ce qu'est le langage L_0 . Est-il fini ?
 - b) (0,5 point) Donner une expression rationnelle décrivant L_0 .
2. (6 points) Prenons maintenant l'exemple de L_1 .
 - a) (1 point) Donner une expression rationnelle e décrivant L_1 .
 - b) (2 points) Construire l'automate de Thompson associé à e .
 - c) (1 point) Donner un automate équivalent au précédent qui ne contienne pas de transitions spontanées (aussi appelées ε -transitions).
 - d) (1 point) L'automate obtenu est-il déterministe ? Si oui justifier, sinon donner un automate déterministe équivalent.
 - e) (1 point) Minimiser l'automate obtenu à la question précédente (c'est-à-dire, construire l'automate canonique).
3. (4,5 points) On passe à L_2 .
 - a) (2 points) Montrer que L_2 n'est pas rationnel.
 - b) (2 points) Proposer une grammaire hors-contexte pour L_2 .
 - c) (0,5 point) Donner un arbre de dérivation par cette grammaire du mot $baaabbaaa \in L_2$.

Tourner la page.

4. (4 points) Considérons ensuite L_3 .
 - a) (2 points) Montrer que L_3 n'est pas hors-contexte.
 - b) (2 points) Proposer une grammaire contextuelle ou une grammaire monotone (au choix) pour L_3 .
5. (2 points) Quel est le type dans la hiérarchie de Chomsky du langage L_k pour $k \geq 4$? Justifier en quelques lignes votre réponse, mais aucune preuve formelle n'est exigée.
6. (2,5 points) On considère enfin $L = \cup_{k=0}^{\infty} L_k$.
 - a) (1 point) Décrire en français ce qu'est le langage L .
 - b) (1,5 points) Le langage L est-il récursif? Justifier.