

# Examen

## Théorie des langages (INF105)

Pierre SENELLART

pierre.senellart@telecom-paristech.fr

L'examen du module INF105 dure une heure et demie. Tous les documents sont autorisés, mais calculatrices, ordinateurs et objets communicants sont interdits. L'énoncé comporte un unique problème noté sur 20 points.

### Langages miroirs

On utilisera le symbole « + » pour dénoter la disjonction au sein des expressions rationnelles, comme dans le polycopié (mais contrairement à `grep` qui utilise le symbole « | » à la place).

Dans tout le problème, on fixe un alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ .

Le *miroir* d'un mot  $u = u_1 \dots u_n$  avec  $u_1, \dots, u_n$  des symboles de  $\Sigma$  est le mot  $\tilde{u} = u_n \dots u_1$ . Le miroir d'un langage  $L \subseteq \Sigma^*$  est l'ensemble  $\tilde{L}$  des miroirs de mots de  $u : \tilde{L} = \{\tilde{u} \mid u \in L\}$ .

1. (13 points) Soit  $L_1$  le langage décrit par l'expression rationnelle  $e_1 = a^*b + aba$ .
  - a) (2 points) Construire l'automate de Thompson associé à  $e_1$ .
  - b) (1 point) Donner un automate équivalent au précédent qui ne contienne pas de transitions spontanées (aussi appelées  $\varepsilon$ -transitions). On appelle cet automate  $A_1$ .
  - c) (2 points) Décrire une construction qui, à partir d'un automate non-déterministe  $A$  reconnaissant un langage  $L$ , permet d'obtenir un automate non-déterministe  $\tilde{A}$  reconnaissant  $\tilde{L}$ . Justifier de la correction de cette construction. Si l'automate initial  $A$  est déterministe, en est-il de même de l'automate résultant  $\tilde{A}$  ?
  - d) (0,5 point) Appliquer cette construction à  $A_1$  et en déduire un automate  $\tilde{A}_1$  pour  $\tilde{L}_1$ .
  - e) (2 points) En déduire un automate déterministe pour  $\tilde{L}_1$ . Compléter cet automate.
  - f) (2 points) Construire un automate minimal pour  $\tilde{L}_1$ . Détailler votre construction.
  - g) (2 points) Décrire une construction qui, à partir d'une expression rationnelle  $e$  décrivant un langage  $L$ , permet d'obtenir une expression rationnelle  $\tilde{e}$  décrivant  $\tilde{L}$ , sans passer par la construction d'un automate. Justifier de la correction de cette construction.
  - h) (1 point) Utiliser cette construction pour construire une expression rationnelle  $\tilde{e}_1$  à partir de  $e_1$ .
  - i) (0,5 point) Le langage miroir d'un langage rationnel est-il rationnel ? Justifier votre affirmation.
2. (5 points) Soit  $G_2$  la grammaire sur  $\Sigma$  définie par les règles de productions suivantes :

$$\begin{cases} S & \rightarrow aSb \mid bbaTaa \\ aT & \rightarrow S \mid b \end{cases}$$

Soit  $L_2$  le langage engendré par  $G_2$ .

- a) (0,5 point) Quel est le type de la grammaire  $G_2$  ?

- b) (1 point) Montrer que le langage  $L_2$  est hors-contexte.
  - c) (2 points) Décrire une construction qui, à partir d'une grammaire hors-contexte  $G$  engendrant un langage  $L$ , permet d'obtenir une grammaire hors-contexte  $\tilde{G}$  engendrant  $\tilde{L}$ . Justifier de la correction de cette construction.
  - d) (0,5 point) En déduire une grammaire hors-contexte pour  $\tilde{L}_2$ .
  - e) (1 point) Soit  $L$  un langage hors-contexte arbitraire. Le langage  $L\tilde{L}$  est-il nécessairement hors-contexte? Prouver votre affirmation.
3. (1 point) Soit  $L$  un langage semi-décidable arbitraire. Le langage  $\tilde{L}$  est-il semi-décidable? Justifier votre affirmation.
4. (1 point) Soit  $L$  un langage décidable arbitraire. Le langage  $\tilde{L}$  est-il décidable? Justifier votre affirmation.