

# Examen

## Théorie des Langages (INF105)

Pierre SENELLART

pierre.senellart@telecom-paristech.fr

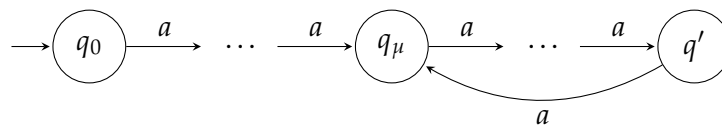
L'examen du module INF105 dure une heure et demie. Tous les documents sont autorisés, mais calculatrices, ordinateurs et objets communicants sont interdits. L'énoncé comporte un seul exercice de 9 questions.

### Langages unaires

On s'intéresse aux langages définis sur l'alphabet  $\Sigma = \{a\}$ ; l'alphabet étant de cardinal 1, on parle de *langages unaires*.

Pour une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , on note  $L_f$  le langage  $\{a^{f(n)} \mid n \geq 0\}$ . Ainsi,  $L_{n \rightarrow n^2}$  est le langage de tous les mots sur  $\Sigma^*$  dont la longueur est un carré,  $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ . Par souci de concision, on notera juste  $L_{\alpha n + \beta}$  le langage  $L_{n \rightarrow \alpha n + \beta}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des entiers et  $L_{n^2}$  le langage  $L_{n \rightarrow n^2}$ .

- (2 points) Proposer (sans justification) un automate fini déterministe qui reconnaît le langage  $L_{3n+2}$ .
- (3 points) En utilisant la méthode d'élimination des états (algorithme de Brzozowski et McCluskey), construire une expression rationnelle décrivant ce même langage. On prendra soin de détailler chaque étape (on s'autorisera à appliquer deux étapes d'élimination à la fois dans les cas faciles).
- (2 points) Proposer (sans justification) une grammaire hors-contexte qui engendre le langage  $L_{5n+3}$ . Donner un arbre de dérivation de cette grammaire pour le mot  $a^{13}$ .
- (2 points) Montrer que pour tous entiers naturels  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ , le langage  $L_{\alpha n + \beta}$  est rationnel.
- (3 points) Montrer que  $L_{n^2}$  n'est ni rationnel ni hors-contexte. *Indication* : on pourra utiliser le fait que  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$ .
- (2 points) Montrer que tout automate déterministe émondé reconnaissant un langage infini sur l'alphabet  $\{a\}$  a nécessairement la forme suivante à la position près des états finals : un chemin depuis un état initial  $q_0$  vers un état  $q_\mu$ , puis un cycle de  $\lambda$  étapes de  $q_\mu$  vers lui-même, dont toutes les transitions sont étiquetées par  $a$  :



Quelle peuvent être les valeurs de  $\lambda$ ? Les valeurs de  $\mu$ ? Y a-t-il toujours un état final dans le cycle de  $q_\mu$  vers lui-même? Prouver vos affirmations.

- (2 points) En utilisant la caractérisation de la question précédente, démontrer que si  $L$  est un langage rationnel infini sur  $\Sigma$  alors il existe deux entiers naturels  $\lambda \geq 1$  et  $\mu \geq 0$  tels que pour tout  $m \geq \mu, a^m \in L \iff a^{m+\lambda} \in L$ .
- (2 points) Réciproquement, démontrer que pour un langage  $L$  sur  $\Sigma$ , s'il existe deux entiers naturels  $\lambda \geq 1$  et  $\mu \geq 0$  tels que pour tout  $m \geq \mu, a^m \in L \iff a^{m+\lambda} \in L$ , alors  $L$  est rationnel.
- (2 points) Soit  $P$  un polynôme à coefficients positifs ou nuls ( $P(n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i n^i$  avec, pour tout  $i, \alpha_i \geq 0$ ). Est-ce que  $L_P$  est semi-décidable? Est-il décidable? Prouver vos affirmations.