Devoir à la maison

Module: Théorie des Langages (INF202)

Pierre SENELLART
pierre.senellart@telecom-paristech.fr

À rendre pour le 23 septembre 2008

1 Exercice 1

On considère la famille de langages L_n définie sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ par : $u \in L_n$ si et seulement si tout facteur de u de longueur n contient au moins autant de a que de b.

Ainsi, L_2 contient les éléments suivants : *ab* ; *aa* ; *ba* ; *aab*... En revanche ni *bb* ni *bba* ne sont des éléments de L_2, car ils contiennent un facteur de taille 2 (*bb*) contenant strictement plus de b que de a. On admet enfin que ε, a et b, qui ne contiennent pas de facteur de taille 2, satisfont la contrainte et sont également dans L_2.

1. Montrer que L_2 est un langage rationnel, en proposant un automate fini pour ce langage.

   Vous prendrez soin de justifier précisément votre réponse en *prouvant* que le langage reconnu par l'automate que vous proposez est exactement égal à L_2.
2. En utilisant une construction vue en cours, construisez, à partir de l'automate fini de la question précédente, une expression rationnelle pour L_2.
3. Montrez que, pour tout n, il existe un langage fini F tel que le complémentaire de L_n s'écrive $\overline{L_n} = \Sigma^* F\, \Sigma^*$.
4. Déduisez de la question 3 que tous les langages de la famille L_n sont rationnels.

2 Exercice 2

En construisant l'automate canonique qui leur est associé, montrer que les expressions rationnelles « $(a|b)^*c?d$ » et « $(a^*|b)^*(a^*|c)d$ » sont équivalentes. Donner les principales étapes des deux constructions.

3 Exercice 3

Soit $\Sigma = \{a\}$. Montrer que le langage $L = \{a^2, a^3, a^5, a^7, a^{11} \ldots\}$, constitué des mots de Σ^* ayant un nombre *premier* de a, n'est pas rationnel.